- Lecture 1: Introduction, Abstract Rewriting
- Lecture 2: Term Rewriting
- Lecture 3: Combinatory Logic
- Lecture 4: Termination
- Lecture 5: Matching, Unification
- Lecture 6: Equational Reasoning, Completion
- Lecture 7: Confluence
- Lecture 8: Modularity
- Lecture 9: Strategies
- Lecture 10: Decidability
- Lecture 11: Infinitary Rewriting

Outline

- Overview
- Modularity

Modularity

Definition

A property of TRSs is modular if it is preserved under union.

Definition

A property of TRSs is modular if it is preserved under union.

Remark

Without further restrictions 'no' property of TRSs is modular:

Definition

A property of TRSs is modular if it is preserved under union.

Remark

Without further restrictions 'no' property of TRSs is modular:

$$\textit{termination} \qquad a \to b \qquad b \to a$$

Definition

A property of TRSs is modular if it is preserved under union.

Remark

Without further restrictions 'no' property of TRSs is modular:

termination	$a \to b$	$b \to a$
confluence	$a \to b$	$a \to c$

Definition

A property of TRSs is modular if it is preserved under union.

Remark

Without further restrictions 'no' property of TRSs is modular:

termination	$a \to b$	$b \to a$
confluence	$a \to b$	$a \to c$

Definition

A property P is preserved under signature extension if:

$$(\Sigma, R) \vDash P \quad \Longrightarrow \quad (\Sigma \cup \mathcal{G}, R) \vDash P$$

for all TRSs (Σ, R) and signatures $\mathcal{G}$ with $\Sigma \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$.

Definition

TRS R over signature Σ

- defined symbols $\quad \Sigma_{\mathcal{D}} = \{ \mathsf{root}(\ell) \mid \ell \to r \in R \}$

Definition

TRS R over signature Σ

- defined symbols $\quad \Sigma_{\mathcal{D}} = \{ \mathsf{root}(\ell) \mid \ell \to r \in R \}$
- constructors $\quad \Sigma_{\mathcal{C}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\mathcal{D}}$

Definition

TRS R over signature Σ

- defined symbols $\quad \Sigma_{\mathcal{D}} = \{ \mathsf{root}(\ell) \mid \ell \to r \in R \}$
- constructors $\quad \Sigma_{\mathcal{C}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\mathcal{D}}$

More Interesting Combinations

$(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ $\quad$ $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$

(Σ, R) $\quad$ $\Sigma_{\mathcal{C}}$ $\Sigma_{\mathcal{D}}$

two TRSs $\quad$ disjoint

Definition

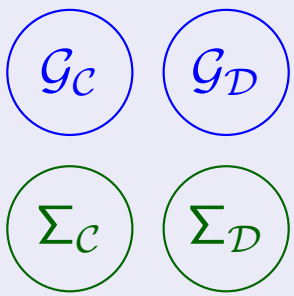
TRS R over signature Σ

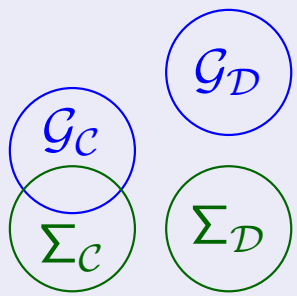
- defined symbols $\quad \Sigma_{\mathcal{D}} = \{ \mathsf{root}(\ell) \mid \ell \to r \in R \}$
- constructors $\quad \Sigma_{\mathcal{C}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\mathcal{D}}$

More Interesting Combinations

$(\mathcal{G}, \mathcal{S})$

(Σ, R)





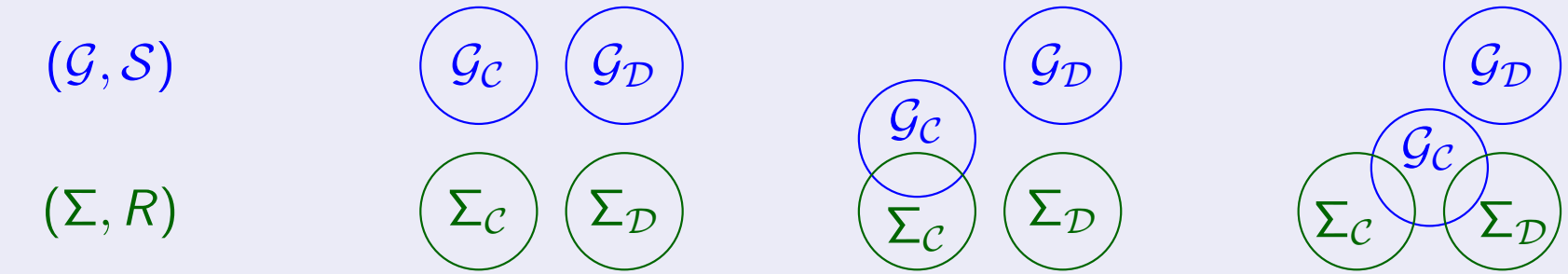
two TRSs | disjoint | constructor-sharing

Definition

TRS R over signature Σ

- defined symbols $\quad \Sigma_{\mathcal{D}} = \{ \mathrm{root}(\ell) \mid \ell \to r \in R \}$
- constructors $\quad \Sigma_{\mathcal{C}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\mathcal{D}}$

More Interesting Combinations



two TRSs | disjoint | constructor-sharing | hierarchical

Example

$$
\begin{aligned}
0 + y &\to y \\
\mathsf{s}(x) + y &\to \mathsf{s}(x + y) \\
0 - y &\to 0 \\
x - 0 &\to x \\
\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) &\to x - y \\
\mathsf{nil} +\!\!+ x &\to x \\
(x : y) +\!\!+ z &\to x : (y +\!\!+ z) \\
\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} &\to \mathsf{false} \\
\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} &\to \mathsf{false} \\
x \wedge x &\to x \\
\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\
\mathsf{sum}(x : y) &\to x + \mathsf{sum}(y)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
0 \times y &\to 0 \\
\mathsf{s}(x) \times y &\to x \times y + y \\
\mathsf{fib}(0) &\to \mathsf{s}(0) \\
\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) &\to \mathsf{s}(0) \\
\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) &\to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x) \\
0 \div \mathsf{s}(y) &\to 0 \\
\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) &\to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y)) \\
x < 0 &\to \mathsf{false} \\
0 < \mathsf{s}(y) &\to \mathsf{true} \\
\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) &\to x < y \\
\mathsf{length}(\mathsf{nil}) &\to 0 \\
\mathsf{length}(x : y) &\to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))
\end{aligned}
$$

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ✛ ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

h

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ✛ ② ✛ ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

h cs

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ✛ ② ✛ ③ ✛ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

h cs h

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ✛ ② ✛ ③ ✛ ④ ✛ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

h cs h d

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	⑩

$$\underset{\text{h}}{\textcircled{1} \div \textcircled{2}} \quad \underset{\text{cs}}{\div \textcircled{3}} \quad \underset{\text{h}}{\div \textcircled{4}} \quad \underset{\text{d}}{\div \textcircled{5}} \quad \underset{\text{h}}{\div \textcircled{6}} \quad \div \textcircled{7} \quad \div \textcircled{8} \quad \div \textcircled{9} \quad \div \textcircled{10}$$

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ✛ ② ✛ ③ ✛ ④ ✛ ⑤ ✛ ⑥ ✛ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

h cs h d h d

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① ✛ ② ✛ ③ ✛ ④ ✛ ⑤ ✛ ⑥ ✛ ⑦ ✛ ⑧ ⑨ ⑩

h cs h d h d cs

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① $\dotplus$ ② $\dotplus$ ③ $\dotplus$ ④ $\dotplus$ ⑤ $\dotplus$ ⑥ $\dotplus$ ⑦ $\dotplus$ ⑧ $\dotplus$ ⑨ ⑩

h cs h d h d cs h

Example

①	$0 + y \to y$ $\mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$	$0 \times y \to 0$ $\mathsf{s}(x) \times y \to x \times y + y$	②
③	$0 - y \to 0$ $x - 0 \to x$ $\mathsf{s}(x) - \mathsf{s}(y) \to x - y$	$\mathsf{fib}(0) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(0)) \to \mathsf{s}(0)$ $\mathsf{fib}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{fib}(\mathsf{s}(x)) + \mathsf{fib}(x)$	④
⑤	$\mathsf{nil} +\!\!+ x \to x$ $(x : y) +\!\!+ z \to x : (y +\!\!+ z)$	$0 \div \mathsf{s}(y) \to 0$ $\mathsf{s}(x) \div \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}((x - y) \div \mathsf{s}(y))$	⑥
⑦	$\mathsf{true} \wedge \mathsf{false} \to \mathsf{false}$ $\mathsf{false} \wedge \mathsf{true} \to \mathsf{false}$ $x \wedge x \to x$	$x < 0 \to \mathsf{false}$ $0 < \mathsf{s}(y) \to \mathsf{true}$ $\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \to x < y$	⑧
⑨	$\mathsf{sum}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{sum}(x : y) \to x + \mathsf{sum}(y)$	$\mathsf{length}(\mathsf{nil}) \to 0$ $\mathsf{length}(x : y) \to \mathsf{s}(\mathsf{length}(y))$	⑩

① $\overset{\mathsf{h}}{+}$ ② $\overset{\mathsf{cs}}{+}$ ③ $\overset{\mathsf{h}}{+}$ ④ $\overset{\mathsf{d}}{+}$ ⑤ $\overset{\mathsf{h}}{+}$ ⑥ $\overset{\mathsf{d}}{+}$ ⑦ $\overset{\mathsf{cs}}{+}$ ⑧ $\overset{\mathsf{h}}{+}$ ⑨ $\overset{\mathsf{cs}}{+}$ ⑩

Outline

- Overview
- Modularity
  - Definitions
  - Results

Theorem (Toyama's Theorem)

Confluence is modular for disjoint TRSs.

Theorem (Toyama's Theorem)

Confluence is modular for disjoint TRSs.

Remark

Confluence is not modular for constructor-sharing TRSs.

Theorem (Toyama's Theorem)

Confluence is modular for disjoint TRSs.

Remark

Confluence is not modular for constructor-sharing TRSs.

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x,x) &\to \mathsf{a} \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x)) &\to \mathsf{b} \end{aligned} \qquad \mathsf{c} \to \mathsf{g}(\mathsf{c})$$

Theorem (Toyama's Theorem)

Confluence is modular for disjoint TRSs.

Remark

Confluence is not modular for constructor-sharing TRSs.

Example

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(x,x) &\to \mathsf{a} \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x)) &\to \mathsf{b} \end{aligned} \qquad \mathsf{c} \to \mathsf{g}(\mathsf{c})$$

Theorem (Toyama's Theorem)

Confluence is modular for disjoint TRSs.

Remark

Confluence is not modular for constructor-sharing TRSs.

Example

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x,x) & \to & \mathsf{a} \\ \mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x)) & \to & \mathsf{b} \end{array} \qquad \mathsf{c} \to \mathsf{g}(\mathsf{c})$$

$$\mathsf{a} \leftarrow \mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{c}) \to \mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{g}(\mathsf{c})) \to \mathsf{b}$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$$\mathsf{g}(x, y) \to x$$
$$\mathsf{g}(x, y) \to y$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, x) \to \mathsf{f}(x, x, x)$$

$$\mathsf{g}(x, y) \to x$$
$$\mathsf{g}(x, y) \to y$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{g}(\mathsf{a}, \mathsf{b}))$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

$$\mathsf{g}(x,y) \to x$$
$$\mathsf{g}(x,y) \to y$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}))$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \begin{array}{l} \mathsf{g}(x,y) \to x \\ \mathsf{g}(x,y) \to y \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \end{aligned}$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \begin{array}{l} \mathsf{g}(x,y) \to x \\ \mathsf{g}(x,y) \to y \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \end{aligned}$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \begin{matrix}\mathsf{g}(x,y) \to x \\ \mathsf{g}(x,y) \to y\end{matrix}$$

duplicating collapsing

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) \\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}))\end{aligned}$$

Theorem

The disjoint union of terminating TRSs R and $\mathcal{S}$ is terminating if:

- *R and $\mathcal{S}$ lack collapsing rules, or*
- *R and $\mathcal{S}$ lack duplicating rules, or*
- *R or $\mathcal{S}$ lacks both collapsing and duplicating rules.*

Theorem

The disjoint union of terminating TRSs R and $\mathcal{S}$ is terminating if:

- *R and $\mathcal{S}$ lack collapsing rules, or*
- *R and $\mathcal{S}$ lack duplicating rules, or*
- *R or $\mathcal{S}$ lacks both collapsing and duplicating rules.*

Corollary

Termination is preserved under signature extension.

Theorem

Termination is not modular for disjoint TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x)$$

duplicating

$$\mathsf{g}(x,y) \to x$$
$$\mathsf{g}(x,y) \to y$$

collapsing & not confluent

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b}))\end{aligned}$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b})) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b})) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))$$
$$\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{c},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\end{aligned}$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{c},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{c},\mathsf{c},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\end{aligned}$$

Theorem

Termination is not modular for disjoint confluent TRSs.

Example

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},x) \to \mathsf{f}(x,x,x) \qquad \mathsf{a} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(x,y,y) \to x$$
$$\mathsf{f}(x,y,z) \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{b} \to \mathsf{c} \qquad \mathsf{g}(y,y,x) \to x$$

no constructor system

not left-linear

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b})) &\to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{c},\mathsf{b},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{g}(\mathsf{c},\mathsf{c},\mathsf{b}),\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\\ &\to \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{b}))\end{aligned}$$

Theorem

- *termination is modular for disjoint left-linear confluent TRSs*

Theorem

- *termination is modular for disjoint left-linear confluent TRSs*
- *termination is modular for constructor-sharing confluent CSs*

Definition

TRS R over signature Σ is constructor system (CS) if $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{T}(\Sigma_\mathcal{C}, \mathcal{X})$ for every left-hand side $f(l_1, \ldots, l_n)$ of rewrite rules in R.

Theorem

- *termination is modular for disjoint left-linear confluent TRSs*
- *termination is modular for constructor-sharing confluent CSs*

Definition

TRS R over signature Σ is constructor system (CS) if $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{T}(\Sigma_\mathcal{C}, \mathcal{X})$ for every left-hand side $f(l_1, \ldots, l_n)$ of rewrite rules in R.

Theorem

- *weak normalization is modular for constructor-sharing TRSs*

Theorem

- *termination is modular for disjoint left-linear confluent TRSs*
- *termination is modular for constructor-sharing confluent CSs*

Definition

TRS R over signature Σ is constructor system (CS) if $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{T}(\Sigma_\mathcal{C}, \mathcal{X})$ for every left-hand side $f(l_1, \ldots, l_n)$ of rewrite rules in R.

Theorem

- *weak normalization is modular for constructor-sharing TRSs*
- *local confluence is modular for constructor-sharing TRSs*

Theorem

- *termination is modular for disjoint left-linear confluent TRSs*
- *termination is modular for constructor-sharing confluent CSs*

Definition

TRS R over signature Σ is constructor system (CS) if $l_1, \ldots, l_n \in \mathcal{T}(\Sigma_\mathcal{C}, \mathcal{X})$ for every left-hand side $f(l_1, \ldots, l_n)$ of rewrite rules in R.

Theorem

- *weak normalization is modular for constructor-sharing TRSs*
- *local confluence is modular for constructor-sharing TRSs*
- *semi-completeness is modular for constructor-sharing TRSs*